Zusammengesetzter Dreisatz

Arbeiten mit Zustandstripeln

Datei Nr. 15013

Stand: 6. 12. 2019

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Hier werden Aufgaben besprochen, in denen drei Größen gegeben sind, und von denen sich zwei ändern. Eine Lösungsmethode ist die, dass man Dreisätze koppelt, eine andere ist die, aus Proportionalitätsgleichungen die gesuchte Unbekannte zu berechnen. Dazu kann man auch eine Formel aufstellen. Der Schwierigkeitsgrad ist relativ hoch!

Inhalt

1	Einführung	3
2	Es gibt drei Lösungsverfahren	
	1. Verfahren: Mit doppeltem Dreisatz	4
	Hinweis auf die Verwendung der Pfeile im Schema für die Dreisätze	4
	2. Verfahren: Mit Proportionalitäten	6
	3. Verfahren: Eine Formel erstellen	8
3	Aufgaben mit Lösungen (je auf drei Arten)	9 bis 21
	Weitere Aufgaben findet man im Text 10515.	

Verwandte Texte:

10510	Dreisatz-Rechnungen
10511	Umgekehrter Dreisatz
10512	Proportionalitäten, Tabellen und Schaubilder
10513	Tripel und gekoppelte Dreisätze (Dieser Text)
10514	Theorie zu Zustandstripeln
10515	Aufgabensammlung zu dem allem.
10516	Linearität

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Einführung

Im Text 10510 wurden Dreisatzrechnungen besprochen. Jetzt geht es da weiter:

(1) Bei (normalem) Dreisatz werden zwei zueinander proportionale Größen A und B verknüpft. Diese nehmen im gleichen Verhältnis zu oder ab.

Beispiel: **Je größer A wird, desto größer wird B,** oder:
Je kleiner A wird, desto kleiner wird B.

Dabei bleiben die Quotienten der Werte $\frac{A}{B}$ gleich

Einfaches Beispiel:

> 4 Personen ordnen 20 Akten.
> Wie viel schaffen 6 Personen *mit dem gleichen Arbeitstempo*?

Dreisatzlösung:

4 Personen	erledigen	20 Akten
1 Person	erledigt	$20:4=5$ Akten
6 Personen	erledigen	$6\cdot 5=30$ Akten.

Lösung mit Verhältnisgleichung aus den Paaren $(4\text{ P.}\,|\,20\text{ A.})$ und $(6\text{ P.}\,|\,y\text{ A.})$

$$\frac{y}{6}=\frac{20}{4} \quad\Rightarrow\quad y=5\cdot 6=30$$

(2) Jetzt kommt eine dritte Größe dazu, nämlich die Arbeitszeit:

Beispiel:

> 4 Personen ordnen 20 Akten in 12 Tagen
> Wie viele Tage benötigen 6 Personen zum Bearbeiten von 40 Akten mit dem gleichen Arbeitstempo?

Diese Aufgabe ist nicht mit einem einzigen Dreisatz zu lösen, denn er bewältigt nur 2 Größen. Um trotzdem weiter zu kommen, muss man die Aufgabe in zwei Teilaufgaben zerlegen:

Man übergibt die 20 Akten zuerst an 6 Personen. Das heißt, dass man die Aktenzahl zunächst konstant hält.

I. 4 Personen bearbeiten 20 Akten in 12 Tagen.
1 Person braucht dazu $4\cdot 12=48$ Tage.
6 Personen erledigen sie in $48:6=8$ Tagen.
Das war ein umgekehrter Dreisatz.

Nun lässt man diese 6 Personen 40 Akten ordnen:

II. Für 20 Akten brauchen 6 Personen also 8 Tage.
Für 10 Akten dann nur halb so lang, also 4 Tage.
Für 40 Akten benötigen sie dann 16 Tage.

Man kann die Aufgabe auch so lösen, dass man zunächst bei 4 Personen bleibt:

I. 20 Akten werden von 4 Personen in 12 Tagen bearbeitet.
Für 40 Akten benötigen sie natürlich doppelt so lange: 24 Tage.

II. 4 Personen benötigen für 40 Akten 24 Tage.
1 Person braucht dazu dann 4-mal solange, also 96 Tage.
6 Personen erledigen diese Arbeit dann in 96 : 6 = 16 Tagen.

Nun zeige ich systematisch, wie man vorgehen sollte, und welche Möglichkeiten es noch gibt.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2 Es gibt drei Lösungsverfahren

1. Lösungsvariante: Mit doppeltem Dreisatz

Aufgabe 1

Vier Maschinen stellen in 8 Stunden 1200 Reifen her.
Wie viele Reifen produzieren 3 solche Maschinen in 10 Stunden?

Vorarbeit:

In dieser Aufgabenstellung geht es um 3 Größen, aus denen man Tripel T bildet, etwa so:

$$T(x = \text{Anzahl der Maschinen} \mid y = \text{Anzahl der Stunden} \mid z = \text{Anzahl der Reifen})$$

Jedes Tripel gibt einen Zustand dieser Produktion an, weshalb man sie auch **Zustandstripel** nennt.

Die Aufgabe berichtet von einem Anfangszustand: $T_1(4 \mid 8h \mid 1200)$

und sucht einen Endzustand: $T_2(3 \mid 10h \mid z_2)$.

Die Tripel T_1 und T_2 werden mit einem **doppelten Dreisatz** verarbeitet. **Die 1. Möglichkeit:**

	x = Anzahl der Maschinen		y = Zeitspanne	z = Anzahl der Reifen
1. Dreisatz	4 Maschinen	stellen	in 8 Stunden	1200 Reifen her.
	↓ : 4		konstant	↓ : 4
	1 Maschine	stellt	in 8 Stunden	$\frac{1200}{4} = 300$ Reifen her.
	↑ ·3			↑ ·3
	3 Maschinen	stellen	in 8 Stunden	$300 \cdot 3 = 900$ Reifen her.
			↓ : 8	↓ : 8
	3 Maschinen	stellen	in 1 Stunde	$\frac{900}{8}$ Reifen her
	konstant		↑ ·10	↑ ·10
	3 Maschinen	stellen	in 10 Stunden	$\frac{900}{8} \cdot 10 = 1125$ Reifen her.

2. Dreisatz

Beim 1. Dreisatz ändert man die Zeitspanne 8 Stunden nicht. Man rechnet von 4 Maschinen auf die Produktion von 3 Maschinen um. Der Zielsatz wird dann zum Bedingungssatz des 2. Dreisatzes. Da bei ihm schon die Maschinenanzahl stimmt, wird diese nicht mehr verändert. Aber man rechnet von 8 Stunden auf 10 Stunden um.

Hinweis zur Verwendung der Pfeile in diesem Text

Bei proportionalen Größen: Beide nehmen ab (Division) ↓ und ↓

Beide nehmen zu (Multiplikation) ↑ und ↑

Bei antiproportionalen Größen: Wenn eine abnimmt ↓ nimmt die andere zu: ↑

Wenn eine zunimmt ↑ nimmt die andere ab: ↓

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Man kann auch so vorgehen, dass man den ersten Dreisatz nicht zu Ende bringt. Stattdessen reduziert man in der 2. Zeile die Maschinenzahl auf 1 und in der 3. Zeile die Stundenzahl auf 1. Dann erst wird auf die beiden Zielgrößen hochgerechnet:

x = Anzahl der Maschinen		y = Zeitspanne	z = Anzahl der Reifen	
4 Maschinen	stellen	in 8 Stunden	1200 Reifen her.	
↓ : 4			↓ : 4	Proportionalität
1 Maschine	stellt	in 8 Stunden	$\frac{1200}{4}$ Reifen her.	
		↓ : 8	↓ : 8	Proportionalität
1 Maschine	stellt	in 1 Stunde	$\frac{1200}{4 \cdot 8}$ Reifen her.	
		↑ ·10	↑ ·10	Proportionalität
1 Maschine	stellt	in 10 Stunden	$\frac{1200 \cdot 10}{4 \cdot 8}$ Reifen her.	
			↑ ·3	Proportionalität
↑ ·3				
3 Maschinen	stellen	in 10 Stunden	$\frac{1200 \cdot 10 \cdot 3}{4 \cdot 8} = 1125$ Reifen her.	

Nun die Frage: Welche Reihenfolge der Größen sollte man wählen?

Nun – klar sollte sein, dass die Unbekannte Größe „Anzahl der Reifen“ am Ende steht. Die beiden gegebenen Größen „Anzahl der Maschinen“ und „Zeitspanne“ könne aber auch vertauscht werden, wie ich jetzt zeige. Ich wähle dazu die zweite Methode, in der zuerst diese beiden Größen heruntergerechnet werden:

x = Zeitspanne		y = Anzahl der Maschinen	z = Anzahl der Reifen
In 8 Stunden	stellen	4 Maschinen	1200 Reifen her.
↓ : 8		konstant	↓ : 8
In 1 Stunde	stellen	4 Maschinen	$\frac{1200}{8} = 150$ Reifen her.
konstant		↓ : 4	↓ : 4
In 1 Stunde	stellt	1 Maschine	$\frac{150}{4}$ Reifen her.
konstant		↑ ·3	↑ ·3
In 1 Stunden	stellt	3 Maschinen	$\frac{150 \cdot 3}{4}$ Reifen her.
		konstant	↑ ·10
↑ ·10			
In 10 Stunden	stellen	3 Maschinen	$\frac{150 \cdot 3 \cdot 10}{4} = 1125$ Reifen her.

Man erkennt sehr schon an diesem Schema, dass immer eine der beiden vorderen Größen konstant gehalten wird, während die andere angepasst wird.

Demo-Text für www.mathe-cd.de